الدوال اللوغاريتمية

ذ. محمد الكيال

الدالة اللوغاريتمية النبيرية

تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

والتي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$
$\forall y \in]0;+\infty[\quad \forall x \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	$\forall y \in]0;+\infty[\quad \forall x \in]0;+\infty[$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^r) = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
$\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]0;+\infty[$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\ln(x^n) = n\ln|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) \neq 0\}$

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^n \ln x) = 0$	
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

◈ **الاشتقاق:**

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ولدينا:

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

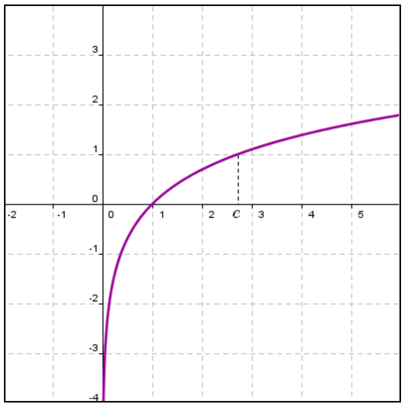
إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن : الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا :

$$\forall x \in I \qquad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

◈ **التمثيل المبياني:**



◈ **إشارة $\ln$:**

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	|| -	0	+

↩ الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

◈ **تعريف:**

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز : $\log_a$

حيث :

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

◈ **استنتاجات وخاصيات:**

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[\qquad \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

$$\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x^r) = r\log_a x \quad (r \in \mathbb{Q})$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

◈ **نهايات و متفاوتات:**

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$	$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

◈ **المشتقة:**

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$